УДК 517.958

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ[1)]

О.В. ГЛАЗЫРИНА, М.Ф. ПАВЛОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: glazyrina-olga@ya.ru; maria.pavlova@kpfu.ru

THE SOLUTION UNIQUENESS THEOREM OF EVOLUTION VARIATIONAL INEQUATION WITH NONLOCAL SPACE OPERATOR

O.V. GLAZYRINA, M.F. PAVLOVA

Kazan Federal University

Аннотация

Рассматривается эволюционное вариационное неравенство с нелинейным сильно монотонным по градиенту пространственным оператором в случае, когда одним из параметров, определяющих этот оператор, является интегральная по пространственным переменным характеристика решения. Получены достаточные условия, обеспечивающие единственность обобщенного решения.

Ключевые слова: Вариационное неравенство, единственность, нелокальный пространственный оператор

Summary

We consider the evolution variational inequation with nonlinear strongly monotone with respect to the gradient space operator in case, when the one of parameters, defining this operator, is the integral solution characteristic on the space variable. We received sufficient conditions which are providing the uniqueness of generalized solution.

Key words: Variational inequation, uniqueness, nonlocal space operator.

1. Постановка задачи.

Пусть Ω − ограниченная область пространства R^n, $n \geqslant 1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Используя принятые обозначения функциональных пространств (см., напр., [1], [2]), определим множество

$$K = \left\{ v\,,\ v \in L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_p\,(\Omega)) \bigcap C(0,T; L_2\,(\Omega)),\ v \geqslant 0 \text{ п.в. в } Q_T \right\},\ p > 1.$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u \in K$ такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p'}(0,T; W^{-1}_{p'}(\Omega)), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п. в. в } \Omega\,, \tag{2}$$

удовлетворяющую неравенству

$$\int\limits_0^T \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v-u\rangle dt + \int\limits_0^T \langle Lu, v-u\rangle dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, v-u\rangle dt, \qquad \forall v \ \in \ K. \tag{3}$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

Здесь $p' = p/(p-1)$, $\langle w, v\rangle$ – значение функционала w из $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ на элементе v из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, k_i, u_0 и f – заданные функции, L – оператор, определяемый формулой

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} k_i(x, \nabla u, Bu), \tag{4}$$

∇u – градиент u, B – оператор вида

$$(Bu)(t) = \int_{\Omega'} g(x, u(x,t))\, dt\,, \tag{5}$$

Ω' – область, принадлежащая Ω или совпадающая с ней, функция g – известная функция.

Пространственные операторы с нелокальностями вида (5) возникают, например, при математическом описании диффузии популяции бактерий, когда предполагается, что скорость распространения в точке определяется глобальным состоянием среды (см., напр., [3] – [5]).

В дальнейшем будем предполагать, что $k_i(x,\xi,\nu)$, $i = 1,\ldots,n$, непрерывны по ν и ξ, измеримы по x и при любых значениях аргументов $x \in \Omega$, $\nu \in R$, ξ^1, ξ^2, $\xi \in R^n$ удовлетворяют условиям

$$\mid k_i(x,\xi,\nu) \mid \leqslant d_0 \sum_{j=1}^{n} \mid \xi_j \mid^{p-1} + d_1\ , \quad d_0 = \text{const} > 0, \quad d_1 = \text{const} \geqslant 0\ , \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(x,\xi,\nu)\xi_i \geqslant d_2 \sum_{i=1}^{n} \mid \xi_i \mid^p - d_3, \quad d_2 = \text{const} > 0, \quad d_3 = \text{const} \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i(x,\xi^1,\nu) - k_i(x,\xi^2,\nu))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \geqslant c_0 \sum_{i=0}^{n} (\xi_i^1 - \xi_i^2)^p, \tag{8}$$

Из этих предположений следует, что оператор L, действующий из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$, является непрерывным, ограниченным, коэрцитивным и сильно монотонным по градиенту.

В работе [6] для задачи (1)–(3) в случае, когда $g(x,\xi) = g_0(x)\xi$ (g_0 – заданная функция), доказано существование обобщенного решения.

2. Единственность решения эволюционного вариационного неравенства.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6)–(8). *Кроме того, функции* k_i *и* g *удовлетворяют неравенствам*

$$|k_i(x,\xi,\nu_1) - k_i(x,\xi,\nu_2)| \leqslant c_1 \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p-1} + c_2 \right) |\nu_1 - \nu_2|^{\beta}, \tag{9}$$

$$\xi \in R^n, \quad \forall \nu \in R, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$|Bv_1 - Bv_2| \leqslant c_3 \|v_1 - v_2\|_{L_2(\Omega')}^{\gamma} \quad \forall\, v_1, v_2 \in L_2(\Omega'), \tag{10}$$

здесь c_1, c_2, c_3 – *константы,* $\beta > 0$, $\gamma > 0$ – *постоянные, удовлетворяющие условиям*

$$\beta\gamma p' \geqslant 2. \tag{11}$$

Тогда решение задачи (1)–(3) *единственно.*

Доказательство.

Предполагаем, что существует два решения задачи (1)–(3) u_1 и u_2. Тогда из (3), очевидно, следует, что для любого $t_1 \in (0,T)$ справедливы неравенства вида

$$\int_0^{t_1} < \frac{\partial u_1}{\partial t}, v - u_1 > dt + \int_0^{t_1} < Lu_1, v - u_1 > dt \geqslant \int_0^{t_1} < f, v - u_1 > dt, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^{t_1} < \frac{\partial u_2}{\partial t}, v - u_2 > dt + \int\limits_0^{t_1} < Lu_1, v - u_2 > dt \geqslant \int\limits_0^{t_1} < f, v - u_2 > dt. \tag{13}$$

Полагая в (12) $v = u_2$, а в (13) $v = u_1$, сложим эти неравенства. В результате будем иметь

$$\int\limits_0^{t_1} < \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t}, u_2 - u_1 > dt + \int\limits_0^{t_1} < Lu_1 - Lu_2, u_2 - u_1 > dt \geqslant 0. \tag{14}$$

Или

$$\int\limits_0^{t_1} < \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2 > dt + \int\limits_0^{t_1} < Lu_1 - Lu_2, u_1 - u_2 > dt \leqslant 0. \tag{15}$$

Второе слагаемое в левой части неравенства (15) обозначим через I и запишем его в виде

$$I = \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n (k_i(x, \nabla u_1, Bu_1) - k_i(x, \nabla u_2, Bu_2)) \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x_i} dx dt =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n (k_i(x, \nabla u_1, Bu_1) - k_i(x, \nabla u_2, Bu_1)) \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x_i} dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n (k_i(x, \nabla u_2, Bu_1) - k_i(x, \nabla u_2, Bu_2)) \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x_i} dx dt = I_1 + I_2.$$

Из условия (8) следует что

$$I_1 \geqslant c_0 \int\limits_0^{t_1} \|u_1 - u_2\|^p_{W^1_p(\Omega)} dt. \tag{16}$$

Используя неравенство Гельдера и ε-неравенство, оценим I_2 следующим образом

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{p'} p'} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |k_i(x, \nabla u_2, Bu_1) - k_i(x, \nabla u_2, Bu_2)|^{p'} dx dt + \frac{\varepsilon^p}{p} \int\limits_0^{t_1} \|u_1 - u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} dt. \tag{17}$$

Используя неравенства (9), (10) и неравенство Гельдера нетрудно получить

$$\int\limits_\Omega |k_i(x, \nabla u_2, Bu_1) - k_i(x, \nabla u_2, Bu_2)|^{p'} \leqslant c_1^{p'} (n+1)^{1/(p-1)} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n |\frac{\partial u_2}{\partial x_j}|^p + c_2^{p'} \Big) \|u_1 - u_2\|^{\beta\gamma p'}_{L_2(\Omega')}. \tag{18}$$

Из (17), (18) и условия (11) следует

$$|I_2| \leqslant \int\limits_0^{t_1} \Big\{ \frac{c}{\varepsilon^{p'} p'} \big(\|u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} + 1 \big) \|u_1 - u_2\|^{\beta\gamma p'}_{L_2(\Omega')} + \frac{\varepsilon^p}{p} \|u_1 - u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \Big\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t_1} \Big\{ \frac{c}{\varepsilon^{p'} p'} \big(\|u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} + 1 \big) \big(\|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|u_2\|_{L_2(\Omega)} \big)^{\beta\gamma p' - 2} \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^p}{p} \|u_1 - u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \Big\} dt, \tag{19}$$

где c — константа, значение которой зависит от c_1, c_2 и меры области Ω. Записав (15) в виде

$$\int\limits_0^{t_1} < \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2 > dt + I_1 \leqslant |I_2|$$

и воспользовавшись оценками (16), (19), нетрудно получить, выбирая ε так, что $c_0 - \varepsilon^p/p \geqslant 0$, следующее неравенство

$$\frac{1}{2}\|u_1(t_1) - u_2(t_1)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\varepsilon^{p'}p'} \int\limits_0^{t_1} \left\{ \left(\|u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} + 1\right)\left(\|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|u_2\|_{L_2(\Omega)}\right)^{\beta\gamma p' - 2} \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(\Omega)} \right\} dt. \qquad (20)$$

Так как $u_1,\ u_2 \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)) \cap C(0,T;L_2(\Omega))$ и выполнено условие (11), то сомножитель при $\|u_1 - u_2\|^2_{L_2(\Omega)}$ в правой части неравенства (20) является интегрируемой на $(0,T)$ функцией. Поэтому из леммы Гронуола (см., напр., [7], с. 87) вытекает что $\|u_1(t_1) - u_2(t_1)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 0$ для любого $t_1 \in (0,T)$. Следовательно, $u_1 = u_2$ почти всюду в Q_T. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
2. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир. — 1978. — 336 с.
3. **Chipot M., Molinet L.** Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems // Applicable Analysis. — 2001. — V. 80, № 3/4. — P. 279—315.
4. **Chipot M., Lovat B.** Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching //Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. — 2001. — № 8(1). — P. 35—51.
5. **Simon L.** On quasilinear parabolic functional differential equation with discontinuous terms // Annales Univ. Shi. Budapest. — 2004. — № 47. — P. 211—229.
6. **Глазырина О.В., Павлова М.Ф.** О разрешимости эволюционного вариационного неравенства с нелокальным пространственным оператором // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — P. 884—898.
7. **Карчевский М.М., Павлова М.Ф.** Уравнения математической физики. — Казань: Изд-во Казан. ун-та. — 2008. — 228 с.

REFERENCES

1. **Lions J.-L.** Quelque problemes methodes de resolution des problemes aux limites nonlineaires. — Paris: Dunod, 1969. — 554 p.
2. **Gajewskii H., Groger K., Zacharias K.** Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. — Berlin: Akademie-Verlag, 1974. — 281 p.
3. **Chipot M., Molinet L.** Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems //Applicable Analysis. — 2001. — Vol. 80. — № 3/4. — P. 279—315.
4. **Chipot M., Lovat B.** Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching //Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. — 2001. — № 8(1). — P. 35—51.
5. **Simon L.** On quasilinear parabolic functional differential equation with discontinuous terms // Annales Univ. Shi. Budapest. — 2004. — № 47. — P. 211—229.
6. **Glazyrina O.V., Pavlova M.F.** On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator // Differential equations. — 2014. — V. 50, № 7. — P. 873—887.
7. **Karchevskiy M.M., Pavlova M.F.** Equations of mathematical physics [Uravneniya matematicheskoy fiziki]// Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta. — 2008. — 228 p.(in Russian)